

© International Baccalaureate Organization 2022

All rights reserved. No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without the prior written permission from the IB. Additionally, the license tied with this product prohibits use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, whether fee-covered or not, is prohibited and is a criminal offense.

More information on how to request written permission in the form of a license can be obtained from <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organisation du Baccalauréat International 2022

Tous droits réservés. Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite préalable de l'IB. De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, moyennant paiement ou non, est interdite et constitue une infraction pénale.

Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour obtenir une autorisation écrite sous la forme d'une licence, rendez-vous à l'adresse <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organización del Bachillerato Internacional, 2022

Todos los derechos reservados. No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin la previa autorización por escrito del IB. Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales—, ya sea incluido en tasas o no, está prohibido y constituye un delito.

En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una autorización por escrito en forma de licencia: <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

## Mathematik: Analyse und Ansätze

### Leistungsstufe

### 2. Klausur

Montag, 9. Mai 2022 (Vormittag)

Prüfungsnummer des Kandidaten

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

2 Stunden

#### Hinweise für die Kandidaten

- Schreiben Sie Ihre Prüfungsnummer in die Felder oben.
- Öffnen Sie diese Prüfungsklausur erst nach Aufforderung.
- Für diese Klausur wird ein grafikfähiger Taschenrechner (GTR) benötigt.
- Teil A: Beantworten Sie alle Fragen. Die Antworten müssen in die dafür vorgesehenen Felder geschrieben werden.
- Teil B: Beantworten Sie alle Fragen im beigefügten Answerheft. Tragen Sie Ihre Prüfungsnummer auf der Vorderseite des Answerhefts ein und heften Sie es mit dieser Prüfungsklausur und Ihrem Deckblatt mit Hilfe der beiliegenden Klammer zusammen.
- Sofern in der Frage nicht anders angegeben, sollten alle numerischen Antworten entweder exakt oder auf drei signifikante Stellen genau angegeben werden.
- Für diese Klausur ist ein unverändertes Exemplar der **Formelsammlung zu Mathematik: Analyse und Ansätze** erforderlich.
- Die Höchstpunktzahl für diese Prüfungsklausur ist **[110 Punkte]**.



Bitte schreiben Sie **nicht** auf dieser Seite.

Antworten, die auf dieser Seite geschrieben  
werden, werden nicht bewertet.



Für eine richtige Antwort ohne Rechenweg wird möglicherweise nicht die volle Punktzahl anerkannt. Die Antworten müssen durch einen Rechenweg bzw. Erläuterungen ergänzt werden. Lösungen, die mit einem grafikfähigen Taschenrechner (GTR) berechnet werden, sollten von einem passenden Rechenweg begleitet werden. Wenn Sie zum Beispiel Graphen zum Finden einer Lösung verwenden, sollten Sie diese als Teil Ihrer Antwort skizzieren. Bei falschen Antworten können ggf. Punkte für die richtige Methode vergeben werden, sofern dies durch einen schriftlichen Rechenweg erkennbar wird. Deshalb sollten Sie alle Rechenwege offenlegen.

### Teil A

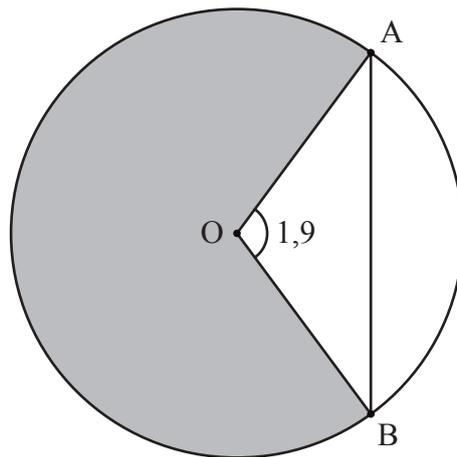
Beantworten Sie **alle** Fragen. Die Antworten müssen in die dafür vorgesehenen Felder geschrieben werden. Bei Bedarf kann der Rechenweg unterhalb der Zeilen fortgesetzt werden.

1. [Maximale Punktzahl: 6]

Das folgende Diagramm zeigt einen Kreis mit Mittelpunkt  $O$  und Radius 5 Meter.

Die Punkte  $A$  und  $B$  liegen auf dem Kreis, und  $\widehat{AOB} = 1,9$  (im Bogenmaß).

**Zeichnung nicht maßstabsgerecht**



(a) Finden Sie die Länge der Sehne  $[AB]$ . [3]

(b) Finden Sie die Fläche des schattierten Sektors. [3]

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....





3. [Maximale Punktzahl: 6]

Die Ereignisse  $A$  und  $B$  sind unabhängig, und  $P(A) = 3P(B)$ .

Es gelte  $P(A \cup B) = 0,68$ . Finden Sie  $P(B)$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



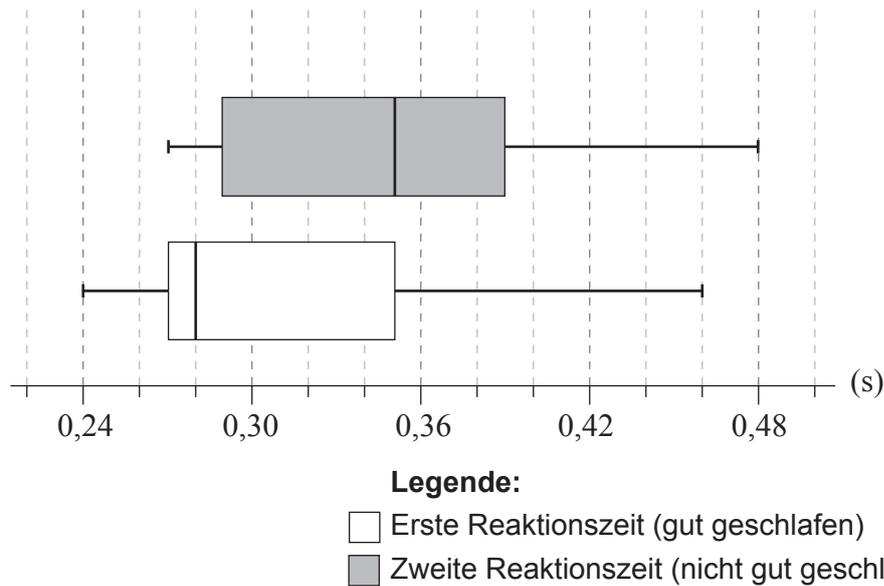
Bitte umblättern

4. [Maximale Punktzahl: 6]

Eine zufällige Stichprobe von neun Erwachsenen wurde ausgewählt, um herauszufinden, ob guter Schlaf ihre Reaktionszeit auf einen visuellen Reiz beeinflusst. Die Reaktionszeit eines jeden Erwachsenen wurde zweimal gemessen.

Die erste Messung der Reaktionszeit wurde an einem Morgen durchgeführt, an dem der Erwachsene gut geschlafen hatte. Die zweite Messung wurde an einem Morgen durchgeführt, an dem derselbe Erwachsene nicht gut geschlafen hatte.

Die Box-und-Whisker-Diagramme für die Reaktionszeiten in Sekunden sind in der folgenden Abbildung dargestellt.



Betrachten Sie das Box-und-Whisker-Diagramm, das die Reaktionszeiten nach einem guten Schlaf darstellt.

- (a) Geben Sie den Median der Reaktionszeit nach einem guten Schlaf an. [1]
- (b) Validieren Sie, dass die Messung von 0,46 Sekunden kein Ausreißer ist. [3]
- (c) Geben Sie an, warum die mittlere Reaktionszeit größer zu sein scheint als der Median der Reaktionszeit. [1]

Betrachten Sie nun die beiden Box-und-Whisker-Diagramme.

- (d) Kommentieren Sie, ob diese Box-und-Whisker-Diagramme Anhaltspunkte dafür liefern, dass unzureichender Schlaf zu einer Verlängerung der Reaktionszeit führt. [1]

**(Auf die vorliegende Frage wird auf der nächsten Seite weiter eingegangen)**





5. [Maximale Punktzahl: 7]

Ein Teilchen bewegt sich auf einer geraden Linie, so dass seine Geschwindigkeit  $v$  in  $\text{ms}^{-1}$  zum Zeitpunkt  $t$  Sekunden gegeben ist durch  $v = \frac{(t^2 + 1)\cos t}{4}$ , mit  $0 \leq t \leq 3$ .

- (a) Bestimmen Sie, wann das Teilchen seine Bewegungsrichtung ändert. [2]
- (b) Finden Sie die Zeitpunkte, an denen die Beschleunigung des Teilchens  $-1,9 \text{ms}^{-2}$  beträgt. [3]
- (c) Finden Sie die Beschleunigung des Teilchens zu dem Zeitpunkt, an dem seine Geschwindigkeit am größten ist. [2]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

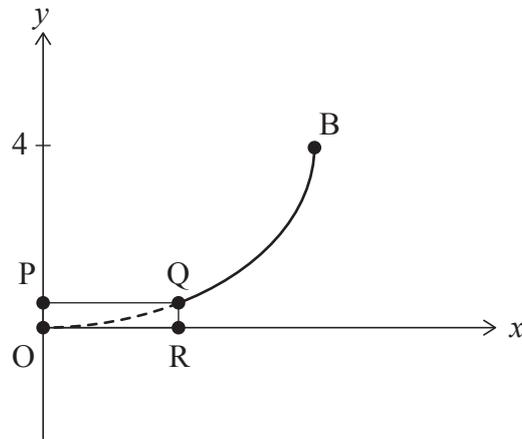
.....



6. [Maximale Punktzahl: 5]

Das folgende Diagramm zeigt die Kurve  $\frac{x^2}{36} + \frac{(y-4)^2}{16} = 1$ , wobei  $h \leq y \leq 4$ .

**Zeichnung nicht maßstabsgerecht**



Die Kurve von Punkt Q zu Punkt B wird um  $360^\circ$  um die  $y$ -Achse gedreht. Die entstandene Figur bildet die Innenfläche einer Schale. Das Rechteck OPQR mit der Höhe  $h$  in cm wird um  $360^\circ$  um die  $y$ -Achse gedreht und bildet dann einen festen Sockel.

Die Schale habe eine vernachlässigbare Dicke.

Das Innenvolumen der Schale beträgt  $285 \text{ cm}^3$ . Bestimmen Sie die Höhe des Sockels.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Bitte umblättern

7. [Maximale Punktzahl: 8]

Betrachten Sie  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(\cos x) - k}{x^2}$ , mit  $k \in \mathbb{R}$ .

(a) Zeigen Sie, dass ein endlicher Grenzwert nur für  $k = \frac{\pi}{4}$  existiert. [2]

(b) Zeigen Sie unter Verwendung der Regel von de L'Hospital algebraisch, dass der Grenzwert  $-\frac{1}{4}$  ist. [6]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



8. [Maximale Punktzahl: 7]

Rachel und Sophia nehmen an einem Speerwurf-Wettbewerb teil.

Rachels Wurfweiten  $R$  in Meter können durch eine Normalverteilung mit Durchschnittswert 56,5 und Standardabweichung 3 modelliert werden.

Sophias Wurfweiten  $S$  in Meter können durch eine Normalverteilung mit Durchschnittswert 57,5 und Standardabweichung 1,8 modelliert werden.

In der ersten Runde des Wettbewerbs muss jeder Teilnehmer fünf Würfe absolvieren. Um sich für die nächste Runde des Wettbewerbs zu qualifizieren, muss ein Teilnehmer in der ersten Runde mindestens einen Wurf von 60 Metern oder mehr erzielen.

Finden Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich nur Rachel oder nur Sophia für die nächste Runde des Wettbewerbs qualifiziert.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



16EP11

9. [Maximale Punktzahl: 4]

Betrachten Sie die Menge der sechsstelligen positiven ganzen Zahlen, die aus den Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9 gebildet werden können.

Finden Sie die Gesamtanzahl der sechsstelligen positiven ganzen Zahlen, die so gebildet werden können, dass

- (a) die Ziffern voneinander verschieden sind; [2]
- (b) die Ziffern voneinander verschieden sind und in aufsteigender Reihenfolge auftreten. [2]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

### Teil B

Beantworten Sie **alle** Fragen im beigefügten Answerheft. Bitte beginnen Sie jede Frage auf einer neuen Seite.

**10.** [Maximale Punktzahl: 15]

Ein Wissenschaftler führte ein neunwöchiges Experiment mit zwei Pflanzen  $A$  und  $B$  derselben Art durch. Er wollte die Auswirkungen der Verwendung eines neuen Pflanzendüngers untersuchen. Pflanze  $A$  wurde regelmäßig gedüngt, Pflanze  $B$  jedoch nicht.

Der Wissenschaftler fand heraus, dass die Höhe  $h_A$  der Pflanze  $A$  (in cm) zum Zeitpunkt  $t$  (in Wochen) durch die folgende Funktion modelliert werden kann:  $h_A(t) = \sin(2t + 6) + 9t + 27$ , mit  $0 \leq t \leq 9$ .

Der Wissenschaftler fand heraus, dass die Höhe  $h_B$  der Pflanze  $B$  (in cm) zum Zeitpunkt  $t$  (in Wochen) durch die folgende Funktion modelliert werden kann:  $h_B(t) = 8t + 32$ , mit  $0 \leq t \leq 9$ .

- (a) Finden Sie mit Hilfe dieser Modelle des Wissenschaftlers die folgenden Größen:
- (i) Die Anfangshöhe der Pflanze  $B$ ;
  - (ii) Die Anfangshöhe der Pflanze  $A$  auf drei signifikante Stellen genau. [3]
- (b) Finden Sie die Werte von  $t$  für  $h_A(t) = h_B(t)$ . [3]
- (c) Beweisen Sie, dass für  $t > 6$  Pflanze  $A$  stets größer war als Pflanze  $B$ . [3]
- (d) Finden Sie für  $0 \leq t \leq 9$  den gesamten Zeitraum, in dem die Wachstumsrate der Pflanze  $B$  größer war als die der Pflanze  $A$ . [6]



Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

11. [Maximale Punktzahl: 20]

Zwei Flugzeuge  $A$  und  $B$  haben in Bezug auf den Ursprung  $O$  die folgenden Ortsvektoren:

$$\mathbf{r}_A = \begin{pmatrix} 19 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r}_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Hierbei stellt  $t$  die Zeit in Minuten dar, und es gilt:  $0 \leq t \leq 2,5$ .

Die Einträge in jedem Spaltenvektor geben die Entfernung von  $O$  nach Osten bzw. nach Norden sowie die Höhe über dem Meeresspiegel an, jeweils gemessen in Kilometern.

- (a) Finden Sie die dreistellige Peilung (Kompasszahl), auf der das Flugzeug  $B$  unterwegs ist. [2]
- (b) Zeigen Sie, dass Flugzeug  $A$  mit höherer Geschwindigkeit fliegt als Flugzeug  $B$ . [2]
- (c) Finden Sie den spitzen Winkel zwischen den Fluggeraden der beiden Flugzeuge. Geben Sie Ihre Antwort in Grad an. [4]

Die Fluggeraden der beiden Flugzeuge kreuzen sich im Punkt  $P$ .

- (d) (i) Finden Sie die Koordinaten von  $P$ .
- (ii) Bestimmen Sie die Zeitspanne zwischen der Ankunft des ersten und des zweiten Flugzeugs am Punkt  $P$ . [7]

Es sei  $D(t)$  die Entfernung zwischen den Flugzeugen  $A$  und  $B$  für  $0 \leq t \leq 2,5$ .

- (e) Finden Sie den kleinsten Wert von  $D(t)$ . [5]



Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

**12.** [Maximale Punktzahl: 21]

Die Population  $P$  einer bestimmten Beuteltierart auf einer kleinen abgelegenen Insel kann durch die folgende logistische Differentialgleichung modelliert werden:

$$\frac{dP}{dt} = kP \left( 1 - \frac{P}{N} \right)$$

Hierbei ist  $t$  die in Jahren gemessene Zeit, und  $k, N$  sind positive Konstanten.

Die Konstante  $N$  steht für die größte Population dieser Beuteltierart, die auf der Insel auf Dauer leben kann.

(a) Interpretieren Sie im Kontext dieses Populationsmodells die Bedeutung von  $\frac{dP}{dt}$ . [1]

(b) Zeigen Sie, dass gilt:  $\frac{d^2P}{dt^2} = k^2P \left( 1 - \frac{P}{N} \right) \left( 1 - \frac{2P}{N} \right)$ . [4]

(c) Zeigen Sie unter Nutzung der Vorarbeit, dass die Population der Beuteltiere für  $P = \frac{N}{2}$  ihre höchste Zuwachsrage hat. Begründen Sie Ihre Antwort. [5]

(d) Bestimmen Sie unter Nutzung der Vorarbeit das Maximum von  $\frac{dP}{dt}$  abhängig von  $k$  und  $N$ . [2]

Es sei  $P_0$  die Anfangspopulation der Beuteltiere.

(e) Zeigen Sie durch Lösen der logistischen Differentialgleichung, dass ihre Lösung in folgender Form ausgedrückt werden kann:

$$kt = \ln \frac{P}{P_0} \left( \frac{N - P_0}{N - P} \right). \quad [7]$$

Nach 10 Jahren beträgt die Population der Beuteltiere  $3P_0$ . Es ist bekannt, dass  $N = 4P_0$ .

(f) Finden Sie den Wert von  $k$  für dieses Populationsmodell. [2]

**Quellen:**

© International Baccalaureate Organization 2022



Bitte schreiben Sie **nicht** auf dieser Seite.

Antworten, die auf dieser Seite geschrieben  
werden, werden nicht bewertet.



16EP16